ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid συνx=0\}$ ισχύει: $(εφx)' = -\dfrac{1}{συν^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ημx}{x} = 1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \quad \text{και} \quad w=z-3i+\frac{1}{z-3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{x}\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x),\ x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$

ii) $$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}\,dt$$

iii) $$\frac{1 - g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}\,dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2)dt$$

τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x=1.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδες 260-261**

Α2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 280**

Α3. **α. Σωστό ,** **β. Σωστό,** **γ. Λάθος,** **δ. Λάθος,** **ε. Σωστό.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \Leftrightarrow |z-3i| + |z-3i| = 2 \Leftrightarrow$

$2|z-3i| = 2 \Leftrightarrow |z-3i| = 1$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

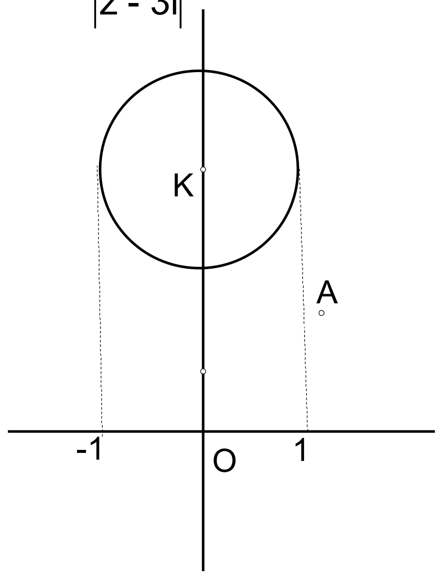
κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 1$

Β2. $|z-3i| = 1 \Leftrightarrow |z-3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z-3i)(\bar{z}+3i) = 1 \overset{z-3i \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\bar{z} + 3i = \dfrac{1}{z-3i}$

Β3. $w = z - 3i + \dfrac{1}{z-3i} = z - 3i + \dfrac{\bar{z}+3i}{(z-3i)(\bar{z}+3i)} = z - 3i + \dfrac{\bar{z}+3i}{|z-3i|^2}$

$= z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$



1ος τρόπος

Από το γ.τ. των εικόνων του z προκύπτει

ότι $-1 \le \mathrm{Re}(z) \le 1 \Leftrightarrow$

$-2 \le \mathbf{2}\mathrm{Re}(z) \le 2 \Leftrightarrow$

$\mathbf{-2 \le w \le 2}$

2ος τρόπος

Από το γ.τ. των εικόνων του z έχουμε :

$x^2 + (y-3)^2 = 1$

άρα $x^2 \le 1 \Leftrightarrow |x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1 \Leftrightarrow$

$-2 \le \mathbf{2}x \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \mathbf{2}\mathrm{Re}(z) \le 2 \Leftrightarrow$

$\mathbf{-2 \le w \le 2}$

Β4. $|z-w| \underset{w=2x}{\overset{z=x+yi}{=}} |x + yi - 2x| = |-x + yi| = |-(x-yi)| = |-\bar{z}| = |z|$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow$

$e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow$

$\left[e^x f'(x) - e^x\right]' = \left[xf'(x)\right]'$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c_1$

Για $x = 0$ προκύπτει $c_1 = -1$, άρα $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow$

$e^x f'(x) - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow (e^x - x)f'(x) = e^x - 1$

Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = e^x - x,\ x \in IR$

$g'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $g(0) = 1$, άρα $g(x) \geq 1 > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0$

$(e^x - x)f'(x) = e^x - 1 \overset{e^x - x > 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = \left[\ell n(e^x - x)\right]'$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $f(x) = \ell n(e^x - x) + c_2$

Για $x = 0$ προκύπτει $c_2 = 0$, άρα $\mathbf{f(x) = \ell n(e^x - x), x \in IR}$

Γ2. $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 0$

Γ3. $f''(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x - x}\right)' = \dfrac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \dfrac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$

Οι ρίζες και το πρόσημο της f'' ταυτίζονται με τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητή.

Θεωρούμε συνάρτηση h, με $h(x) = 2e^x - xe^x - 1$, $x \in IR$

$h'(x) = e^x - xe^x = (1 - x)e^x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗		↘

- $\Delta_1 = (-\infty , 1)$

  Η h είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο Δ_1

  $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(2 - x)e^x - 1\right]$

  $= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2 - x}{e^{-x}} - 1\right) = -1,$

  διότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 - x}{e^{-x}} \underset{DL'H}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

  $\lim\limits_{x \to 1} h(x) \overset{h \text{ συνεχής}}{=} h(1) = e - 1$

  άρα $h(\Delta_1) = (-1 , e - 1)$

  $0 \in h(\Delta_1)$, άρα η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ_1 στο Δ_1.

- $\Delta_2 = [1 , +\infty)$

  Η h είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο Δ_2

  $h(1) = e - 1$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(2 - x)e^x - 1\right] = -\infty$

  διότι $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

  άρα $h(\Delta_2) = (-\infty , e - 1]$

  $0 \in h(\Delta_2)$, άρα η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ_2 στο Δ_2.

Επομένως η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο IR.

- $x < \rho_1 \overset{h \uparrow \text{ στο } (-\infty\,,\,1)}{\Leftrightarrow} h(x) < h(\rho_1) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$
- $\rho_1 < x < 1 \overset{h \uparrow \text{ στο } (-\infty\,,\,1)}{\Leftrightarrow} h(x) > h(\rho_1) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$
- $1 < x < \rho_1 \overset{h \downarrow \text{ στο } (1\,,\,+\infty)}{\Leftrightarrow} h(x) > h(\rho_1) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$
- $x > \rho_2 \overset{h \downarrow \text{ στο } (1\,,\,+\infty)}{\Leftrightarrow} h(x) < h(\rho_2) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$

x	$-\infty$	ρ_1		ρ_2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$
		σ.κ.		σ.κ.	

Άρα **η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει ακριβώς δύο σημεία καμπής**.

Γ4. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = f(x) - \text{συν}x,\ x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$

- Η φ είναι συνεχής στο $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά συνεχών
- $\varphi(0) = f(0) - 1 = -1 < 0$

  $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0$

Από Θ. Bolzano η φ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

$\varphi'(x) = f'(x) + \text{ημ}x > 0$, για $x \in \left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

διότι $f'(x) > 0$ στο $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ και $\text{ημ}x > 0$ στο $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα και το x_0 είναι μοναδικό

Επομένως **η εξίσωση $\ell n(e^x - x) = \text{συν}x$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$**.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\dfrac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \displaystyle\int_0^{-x} \dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

θέτουμε $x + t = u$
Είναι $t = u - x$
$dt = du$
$t = 0 \rightarrow u = x$
$t = -x \rightarrow u = 0$

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du \Leftrightarrow \frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = e^{-2x}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \frac{\displaystyle\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du}{e^{2x}} \Leftrightarrow 1 - f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις g_1, g_2,

με $g_1(x) = \dfrac{e^{2x}}{g(x)}$ και $g_2(x) = \displaystyle\int_0^x g_1(t)\,dt$.

Η g_1 είναι συνεχής στο IR, ως πράξεις συνεχών.

άρα η g_2 είναι παρ/μη στο IR με $g_2'(x) = g_1(x) = \dfrac{e^{2x}}{g(x)}$

Η συνάρτηση f, με $f(x) = 1 + g_2(x)$ είναι παρ/μη στο IR ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x) = [1 + g_2(x)]' = g_2'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Rightarrow f'(x)\cdot g(x) = e^{2x} \quad \textbf{(1)}$$

Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι η g είναι παραγωγίσιμη και

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}du \quad \text{και} \quad f(x)\cdot g'(x) = e^{2x} \quad \textbf{(2)}$$

1ος τρόπος

Από τις (1) και (2) με αφαίρεση προκύπτει

$$f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = 0 \overset{\substack{\text{συνέπειες} \\ \text{Θ.Μ.Τ.}}}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Για $x = 0$ προκύπτει $\dfrac{f(0)}{g(0)} = c \Leftrightarrow \dfrac{1}{1} = c \Leftrightarrow 1 = c$

άρα **$f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in$ IR.**

$2^{ος}$ τρόπος

Από τις (1) και (2) με προκύπτει

$$f'(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g'(x) \underset{g(x)>0}{\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$[\ell n f(x)]' = [\ell n g(x)]' \overset{\substack{\text{συνέπειες}\\ \text{Θ.Μ.Τ.}}}{\Rightarrow} \ell n f(x) = \ell n g(x) + c$$

Για $x = 0$ προκύπτει $\ell n f(0) = \ell n g(0) + c \Leftrightarrow 0 = c$

άρα $\ell n f(x) = \ell n g(x) \Leftrightarrow$ **$f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in IR$.**

Δ2. Από τη σχέση (1) προκύπτει $f(x)\cdot f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow$

$$2f(x)\cdot f'(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow [f^2(x)]' = (e^{2x})'$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. προκύπτει $f^2(x) = e^{2x} + c_1$

Για $x = 0$, έχουμε $f^2(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow 0 = c_1$

Άρα $f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow f^2(x) = (e^x)^2$ και επειδή $f(x) > 0$

θα είναι **$f(x) = e^x$, για κάθε $x \in IR$.**

Δ3. $$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ell n f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ell n e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

θέτουμε $\frac{1}{x} = u$

Όταν $x \to 0^-$ τότε $u \to -\infty$

$$= \lim_{u\to -\infty}\frac{\frac{1}{u}}{e^u} = \lim_{u\to -\infty}\frac{e^{-u}}{u} \underset{DL'H}{=} \lim_{u\to -\infty}\frac{-e^{-u}}{1} = -\infty$$

Δ4. $F(x) = \int_1^x f(t^2)\,dt = \int_1^x e^{t^2}\,dt$

$$F'(x) = \left(\int_1^x e^{t^2}\,dt\right)' = e^{x^2} > 0,$$ άρα F γνησίως αύξουσα στο IR

Αναζητούμε το πρόσημο της F στο $[0 , 1]$

$$0 \le x \le 1 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(0) \le F(x) \le F(1) \Rightarrow F(x) \le 0$$

$$E = -\int_0^1 F(x)\,dx = -\int_0^1 (x)'\cdot F(x)\,dx = -[x\cdot F(x)]_0^1 + \int_0^1 x\cdot F'(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{e-1}{2}}$$ **τ.μ.**