ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:
$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 4

Α3. Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

β) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6\bar{x}$.

Μονάδες 2

γ) Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Μονάδες 2

δ) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Μονάδες 2

ε) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M)=\frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A)=4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K)=-5\lambda+\frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64<N(\Omega)<72$, τότε

Β1. Να δείξετε ότι $N(\Omega)=68$

Μονάδες 6

Β2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

Μονάδες 6

Β4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις:

Α(8, 0) Β(10, 10) Γ(12, 20) $Δ(14, y_Δ)$

$Ε(16, y_Ε)$ Ζ(18, 10) Η(20, 0)

όπου $y_Δ$, $y_Ε$ οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.

Γ1. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες $y_Δ$ και $y_Ε$ των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα

Μονάδες 7

Γ2. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$.

Μονάδες 3

Γ3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Μονάδες 7

Γ4. Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

Μονάδες 4

Γ5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)},\ x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$ και P(A), P(B) είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A\cap B)$, $P(A-B)$, $P(A\cup B)$, $P(B-A)$.

Μονάδες 8

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x)=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)},\ x\in\mathbb{R}.$$

α) Να λυθεί η εξίσωση f(x)=h(x).

Μονάδες 3

β) Αν $x_1< x_2< x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i=2x_i+1$, i=1,2,3 οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση**.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 152

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

Α4. α. ΛΑΘΟΣ, β. ΛΑΘΟΣ, γ. ΣΩΣΤΟ, δ. ΛΑΘΟΣ, ε. ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $P(M) = \dfrac{N(M)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{N(M)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(\Omega) = 4 \cdot N(M)$

1ος τρόπος

Το $N(M)$ είναι φυσικός αριθμός, άρα το $N(\Omega)$ είναι πολλαπλάσιο του 4. Το μόνο πολλαπλάσιο του 4 που βρίσκεται μεταξύ 64 και 72 είναι το 68.

Άρα $\mathbf{N(\Omega) = 68}$.

2ος τρόπος

$64 < N(\Omega) < 72 \Leftrightarrow 68 < 4 \cdot N(M) < 72 \Leftrightarrow$

$16 < N(M) < 18$ και επειδή το $N(M)$ είναι φυσικός αριθμός, τότε $N(M) = 17$ και $\mathbf{N(\Omega) = 68}$.

Β2. $P(M) + P(A) + P(K) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} + 4\lambda^2 - 5\lambda + \dfrac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = \dfrac{1}{4}$

Η τιμή 1 απορρίπτεται, διότι για $\lambda = 1$ είναι $P(A) = 4 > 1$

Άρα $\boldsymbol{\lambda = 1}$.

Β3. $P(A) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{N(A)}{68} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \mathbf{N(A) = 17}$

$P(M) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{N(M)}{68} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \mathbf{N(M) = 17}$

$P(K) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{N(K)}{68} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{N(K) = 34}$

Β4. $P(A \cup M) = \dfrac{N(A) + N(M)}{N(\Omega)} = \dfrac{17 + 17}{68} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

ΘΕΜΑ Γ

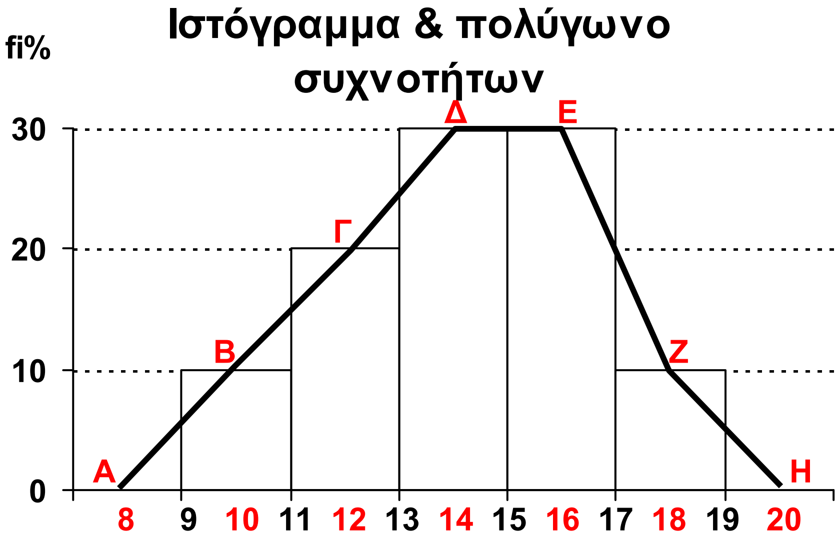
Γ1. Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στον x΄x, άρα $y_Δ = y_Ε$.

$$\sum f_i\% = 100\% \Leftrightarrow 10 + 20 + y_Δ + y_Ε + 10 = 100 \overset{y_Δ = y_Ε}{\Leftrightarrow}$$

$$2y_Δ = 60 \Leftrightarrow \mathbf{y_Δ = y_Ε = 30}$$

**** Το ότι δίνεται η μέση τιμή είναι περιττό στοιχείο που μάλλον μπέρδευε τους μαθητές.***

Γ2.



Γ3.

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$
[9 , 11)	10	10
[11 , 13)	12	20
[13 , 15)	14	30
[15 , 17)	16	30
[17 , 19)	18	10
ΣΥΝΟΛΑ	-	100

Γ4. Αναζητούμε το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα [15 , 19).
Είναι $f_4\% + f_5\% = 30\% + 10\% =$ **40%.**

Γ4. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι ίσο με το πλήθος ν των πωλητών.
Άρα ο ζητούμενος αριθμός των πωλητών είναι :

$40\% \cdot ν = 0{,}4 \cdot 80 =$ **32 πωλητές**.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left[e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \right]'$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left[\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)\right]'$$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x\right)'$$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right)$$

$$= \frac{1}{15} e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left(15x^2 - 11x + 2\right)$$

Το τριώνυμο $15x^2 - 11x + 2$ έχει $\Delta = 1$ και ρίζες $\frac{2}{5}$ και $\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ και $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$,

ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$.

Δ2. Είναι $A \subseteq B$, άρα $P(A) \leq P(B)$.

Επομένως $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$

- $A \cap B = A$, άρα $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$
- $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0$
- $A \cup B = B$, άρα $P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5}$
- $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

Δ3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x = \frac{3}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{15}x \overset{\cdot 30}{\Leftrightarrow}$$

$$10x^3 - 11x^2 + 4x = 9x^3 - 6x^2 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{x = 0}$ ή $\mathbf{x = 2}$ ή $\mathbf{x = 3}$.

Δ4.

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
$x_1 = 0$	1	0
$x_2 = 2$	5	10
$x_3 = 3$	7	21
ΣΥΝΟΛΑ	**13**	**31**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{13}}$$