ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

δ) $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \qquad (1)$

$|w-5\overline{w}| = 12 \qquad (2)$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 4$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ell n x-1,\ x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$
- $\displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\displaystyle \ell n x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot|f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ell n x - x)$, $x>0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 ημ\dfrac{1}{f(x)} - f(x)\right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ell n x \le x-1$, που ισχύει για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_α^x f(t)\,dt,\ x>0,$$

όπου $α>0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x>0$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $β>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $ξ \in (β, 2β)$ τέτοιο ώστε:

$$F(β) + F(3β) = 2F(ξ)$$

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ *(για τους εξεταζομένους)*

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 253
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 191
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 258
Α4. **α.** Σωστό , **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $1^{ος}$ τρόπος

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4 \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow 2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow$$
$$|z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

$2^{ος}$ τρόπος

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |x+yi-1|^2 + |x+yi+1|^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$2x^2 + 2y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

B2. $1^{ος}$ τρόπος

- $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$
  $(z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 + z_2\overline{z}_2 = 2 \Leftrightarrow$
  $|z_1|^2 - z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 + |z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow -z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow$
  $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 0 \quad (1)$
- $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + z_2\overline{z}_2$

$$= |z_1|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + |z_2|^2 \overset{(1)}{=} 1 + 0 + 1 = 2$$

άρα $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$

$2^{ος}$ τρόπος

Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο με κορυφές $O\,(0\,,\,0)$, $A\,(z_1)$, $B\,(z_2)$ και $\Gamma(z_1 + z_2)$.

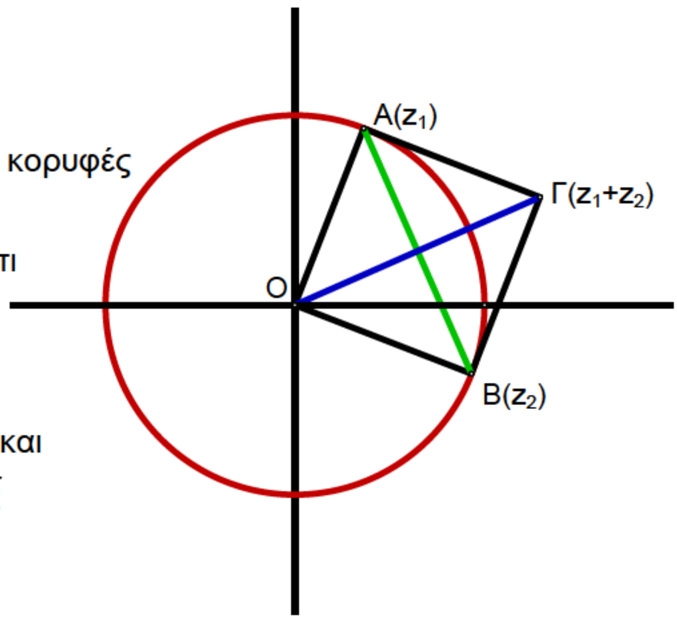
Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο διότι

$(AB)^2 = |z_1 - z_2|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

$(OA)^2 + (OB)^2 = \rho^2 + \rho^2 = 2$

Επομένως το $OA\Gamma B$ είναι τετράγωνο και

$|z_1 + z_2| = (O\Gamma) = (AB) = |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$



$3^{ος}$ τρόπος

Έστω $A\,(z_1)$ και $B\,(z_2)$.

Το $\Delta(-z_2)$ είναι το συμμετρικό του B ως προς το O

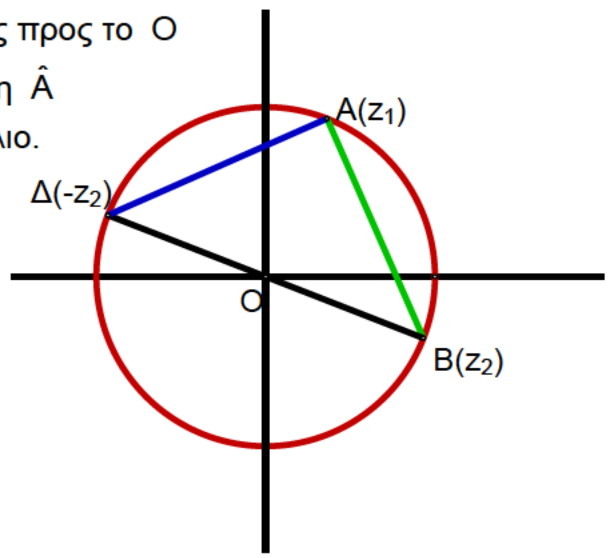
Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο διότι η $\hat{A}$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο.

Π.Θ. : $(A\Delta)^2 = (B\Delta)^2 - (AB)^2 \Leftrightarrow$

$|z_1 - (-z_2)|^2 = (2\rho)^2 - |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow$

$|z_1 + z_2|^2 = 4 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 - 2 - 2$

Επομένως $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$



B3. $|w - 5\overline{w}| = 12 \underset{x,\, y \in \mathbb{R}}{\overset{w = x + yi}{\Leftrightarrow}} |x + yi - 5(x - yi)| = 12 \Leftrightarrow$

$|x + yi - 5x + 5yi| = 12 \Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Leftrightarrow$

$(-4x)^2 + (6y)^2 = 12^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow$

$\dfrac{16x^2}{144} + \dfrac{36y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

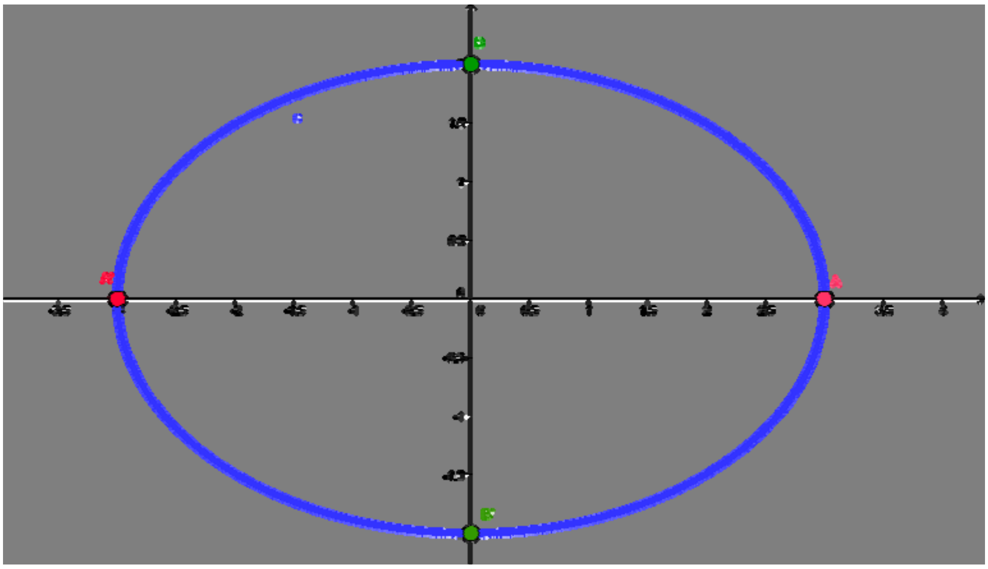
Ο γ.τ. των εικόνων των w είναι έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

1ος τρόπος

Η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ έχει :

- μεγάλο άξονα στον $x'x$ και κορυφές $A\,(3\,,\,0)$, $A'(-3\,,\,0)$ και
- μικρό άξονα στον $y'y$ και κορυφές $B\,(0\,,\,2)$, $B'(0\,,\,-2)$

Σχεδιάζουμε την έλλειψη



Επομένως :

$|w|_{min} = (OA) = (OA') = 2$ και

$|w|_{max} = (OB) = (OB') = 3$

$2^{ος}$ τρόπος

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36$$

- $4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 36 - 4y^2$

  άρα $4x^2 + 4y^2 \leq 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow |w|^2 \leq 9 \Leftrightarrow |w| \leq 3$

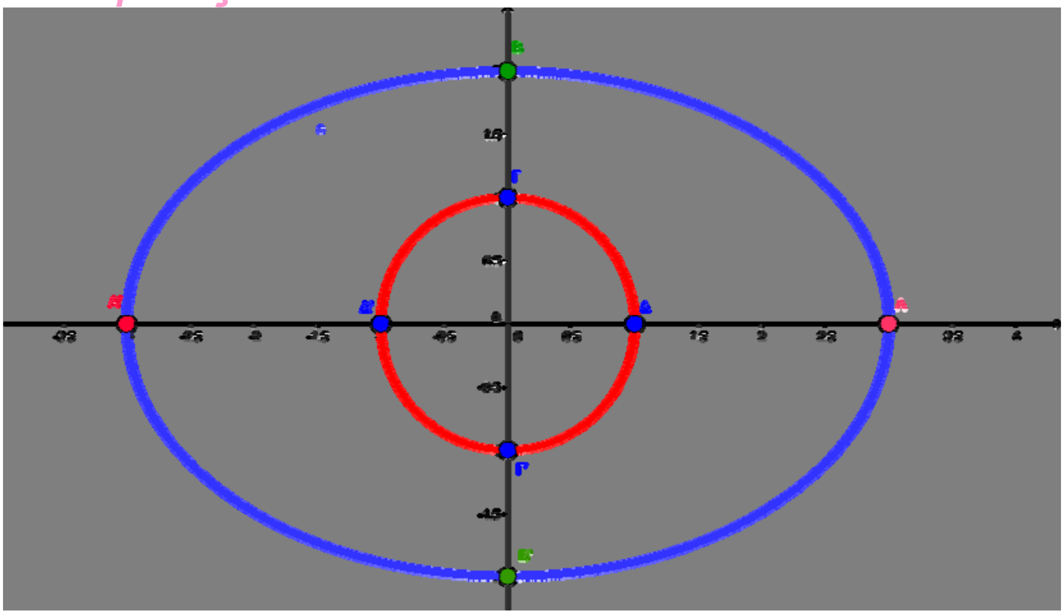
  Η ισότητα ισχύει όταν $x = \pm 3$ και $y = 0$, άρα $|w|_{max} = 3$

- $4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow 9x^2 + 9y^2 = 36 + 5x^2$

  άρα $9x^2 + 9y^2 \geq 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 4 \Leftrightarrow |w|^2 \geq 4 \Leftrightarrow |w| \geq 2$

  Η ισότητα ισχύει όταν $x = 0$ και $y = \pm 2$, άρα $|w|_{min} = 2$

B4. *$1^{ος}$ τρόπος*



$$\left.\begin{aligned} |z - w|_{min} &= (\text{ΒΓ}) = (\text{Β΄Γ΄}) = 1 \\ |z - w|_{max} &= (\text{ΑΔ΄}) = (\text{Α΄Δ}) = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 \leq |z - w| \leq 4$$

$2^{ος}$ τρόπος

$$|z - w| \leq |z| + |w| \leq 1 + |w|_{max} = 1 + 3 = 4$$

$$|z - w| \geq \big||z| - |w|\big| = \big|1 - |w|\big| \overset{|w|>1}{=} |w| - 1 \geq |w|_{min} - 1 = 2 - 1$$

Επομένως $1 \leq |z - w| \leq 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left[(x-1)\cdot \ell nx - 1\right]' = (x-1)'\cdot \ell nx + (x-1)\cdot(\ell nx)'$

$$= \ell nx + (x-1)\cdot\frac{1}{x} = \ell nx + \frac{x-1}{x}$$

- Για $x = 1$ είναι $f'(1) = 0$
- Για $0 < x < 1$ είναι $\ell nx < 0$ και $\dfrac{x-1}{x} < 0$, άρα $f'(x) < 0$
- Για $x > 1$ είναι $\ell nx > 0$ και $\dfrac{x-1}{x} > 0$, άρα $f'(x) > 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0\ ,\ 1]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1\ ,\ +\infty)$.

- $A_1 = (0\ ,\ 1]$

  Η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο A_1

  $$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[(x-1)\cdot \ell nx - 1\right] = +\infty \\ &f(1) = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(A_1) = [-1\ ,\ +\infty)$$

- $A_2 = (1\ ,\ +\infty)$

  Η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο A_2

  $$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+} f(x) \overset{\text{f συνεχής}}{=} f(1) = -1 \\ &\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left[(x-1)\cdot \ell nx - 1\right] = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(A_2) = (-1\ ,\ +\infty)$$

άρα $f(D_f) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-1\ ,\ +\infty)$

Γ2. $x^{x-1} = e^{2013} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ell n x^{x-1} = \ell n e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\cdot \ell n x = 2013 \Leftrightarrow$

$(x-1)\cdot \ell n x - 1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012$

- Η f συνεχής και γν. φθίνουσα στο A_1 και $2012 \in f(A_1)$

  άρα η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μοναδική ρίζα x_1 στο A_1

- Η f συνεχής και γν. αύξουσα στο A_2 και $2012 \in f(A_2)$

  άρα η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μοναδική ρίζα x_2 στο A_2

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

Γ3. *1ος τρόπος*

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = e^x \cdot [f(x) - 2012]$

- h παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

  $h'(x) = e^x \cdot [f(x) + f'(x) - 2012]$

- $h(x_1) = h(x_2) = 0$

από Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$e^{x_0} \cdot [f(x_0) + f'(x_0) - 2012] = 0 \Leftrightarrow$

$f(x_0) + f'(x_0) - 2012 = 0 \Leftrightarrow$

$f(x_0) + f'(x_0) = 2012$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση S, με $S(x) = f'(x) + f(x) - 2012$

- S συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών
- $S(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 = f'(x_1) < 0$, διότι $x_1 < 1$

  $S(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 = f'(x_2) > 0$, διότι $x_2 > 1$

από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$S(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x_0) + f'(x_0) - 2012 = 0 \Leftrightarrow$

$f(x_0) + f'(x_0) = 2012$

Γ4. Είναι $g(x) = f(x) + 1 = (x - 1)\cdot \ell n x$

- $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\cdot \ell n x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Αναζητούμε το πρόσημο της g στο $[1, e]$

Είναι $g(x) > 0$ στο $[1, e]$, διότι $x - 1 > 0$ και $\ell n x > 0$

Άρα $E = \int_1^e g(x)\,dx = \int_1^e (x-1)\cdot \ell n x\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \cdot \ell n x\,dx$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\cdot \ell n x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\cdot (\ell n x)'\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{e^2}{4} - e - \left(\frac{1}{4} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = \int_1^{x^2 - x + 1} f(t)\,dt - \frac{x - x^2}{e}$, $x>0$

Είναι $\varphi(x) \geq 0 = \varphi(1)$.

- Η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$
- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = f(x^2 - x + 1)\cdot(2x - 1) - \frac{1 - 2x}{e}$$

- Το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$

Από Θ. Fermat ισχύει ότι $\varphi'(1) = 0 \Leftrightarrow$

$f(1) + \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$

- Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$
- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$

από συνέπειες Θ. Bolzano,

η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και επειδή

$f(1) = -\dfrac{1}{e} < 0$, θα είναι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

$$\ell n x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)}\,dt + e\right) \cdot |f(x)| \overset{f(x)<0}{\Leftrightarrow}$$

$$\ell n x - x = f(x) \cdot \left(\int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)}\,dt + e\right) \quad (1)$$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου είναι $\ell n x \leq x - 1 < x$,

άρα $\ell n x - x < 0 \underset{f(x)<0}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} \displaystyle\int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)}\,dt + e > 0$

$$(1) \Rightarrow \quad f(x) = \frac{\ell n x - x}{\displaystyle\int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)}\,dt + e}$$

Η συνάρτηση f_1, με $f_1(x) = \dfrac{\ell n x - x}{f(x)}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

ως πράξεις συνεχών, άρα η συνάρτηση f_2,

με $f_2(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)}\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

ως πράξεις παραγωγίσιμων.

$$(1) \overset{f(x)<0}{\Rightarrow} \quad \frac{\ell n x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)}\,dt + e \quad \mathbf{(2)}$$

$1^{ος}$ τρόπος

Θεωρούμε συνάρτηση h, με $h(x) = \int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)} dt + e$

Είναι $h'(x) = \left(\int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)} dt + e\right)' = \frac{\ell n x - x}{f(x)}$

(2) $\Leftrightarrow$ $h'(x) = h(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου είναι $h(x) = c \cdot e^x$ $\Leftrightarrow$

$\int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)} dt + e = c \cdot e^x \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)} dt = c \cdot e^x - e$ (3)

Για $x = 1$ έχουμε $c = 1$

(3) $\overset{c=1}{\Rightarrow} \int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)} dt = e^x - e, \ x > 0$

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε $\frac{\ell n x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{\ell n x - x}{e^x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} \cdot (\ell n x - x), \ x > 0$

$2^{ος}$ τρόπος

Θεωρούμε συνάρτηση K, με $K(x) = \ell n x - x, \ x \in (0, +\infty)$

$K(x) = f(x) \cdot \left(\int_1^x \frac{K(t)}{f(t)} dt + e\right)$ **(3)** $\Leftrightarrow$

$\int_1^x \frac{K(t)}{f(t)} dt + e = \frac{K(x)}{f(x)}$ **(4)**

Παραγωγίζουμε την (3) κατά μέλη και έχουμε :

$K'(x) = f'(x) \cdot \left(\int_1^x \frac{K(t)}{f(t)} dt + e\right) + \cancel{f(x)} \cdot \frac{K(x)}{\cancel{f(x)}} \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$

$K'(x) = f'(x) \cdot \frac{K(x)}{f(x)} + K(x) \Leftrightarrow \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + 1 \Leftrightarrow$

$\left(\ell n |K(x)|\right)' = \left(x + \ell n |f(x)|\right)'$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε

$$\ell n|K(x)| = x + \ell n|f(x)| + c$$

Για $x = 1$ είναι $\ell n|K(1)| = 1 + \ell n|f(1)| + c \Leftrightarrow$

$$\cancel{\ell n|-1|} = 1 + \ell n\left|-\frac{1}{e}\right| + c \Leftrightarrow 0 = 1 - 1 + c \Leftrightarrow c = 0,$$

άρα

$$\ell n|K(x)| = x + \ell n|f(x)| \Leftrightarrow e^{\ell n|K(x)|} = e^{x + \ell n|f(x)|} \Leftrightarrow$$

$$|K(x)| = |f(x)| \cdot e^x \underset{K(x)<0}{\overset{f(x)<0}{\Leftrightarrow}} -K(x) = -f(x) \cdot e^x \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot e^x = K(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{K(x)}{e^x} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^{-x} \cdot (\ell nx - x),\ x > 0$$

Δ2. $f(x) = \dfrac{\ell nx - x}{e^x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{e^x}{\ell nx - x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\ell nx - x} = 0,$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ell nx - x) = -\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f^2(x) \cdot ημ\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] \underset{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)} = 0}{\overset{\text{Θέτω } \frac{1}{f(x)} = u}{=}} \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{1}{u^2} \cdot ημu - \frac{1}{u}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0^-}\frac{ημu - u}{u^2} \underset{DL'H}{=} \lim_{u\to 0^-}\frac{συνu - 1}{2u}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{u\to 0^-}\frac{συνu - 1}{u} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Δ3. Για $x > 0$ είναι :

$$F'(x) = \left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)' = f(x) = \frac{\ell nx - x}{e^x}$$

$$F''(x) = \left(\frac{\ell nx - x}{e^x}\right)' = \frac{(\ell nx - x)' \cdot e^x - (\ell nx - x)\cdot (e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)\cdot e^x - (\ell nx - x)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ell nx + x}{e^x}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} + (x - 1 - \ell nx)}{e^x} > 0, \text{ διότι } \ell nx \leq x - 1$$

άρα η F είναι κυρτή στο $(0\,,+\infty)$

1^{ος} τρόπος

$F(u) = \int_\alpha^u f(t)\,dt\,,\ u > 0$

Η F είναι παραγωγίσιμη στα $[x\,,2x]$ και $[2x\,,3x]$, $x > 0$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν :

- $x_1 \in (x\,,2x)$, τέτοιο ώστε $F'(x_1) = \dfrac{F(2x) - F(x)}{x}$
- $x_2 \in (2x\,,3x)$, τέτοιο ώστε $F'(x_2) = \dfrac{F(3x) - F(2x)}{x}$

$x_1 < x_2 \overset{F'\uparrow}{\Rightarrow} F'(x_1) < F'(x_2) \Leftrightarrow$

$\dfrac{F(2x) - F(x)}{x} < \dfrac{F(3x) - F(2x)}{x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow$

$F(x) + F(3x) > 2\cdot F(2x).$

$2^{ος}$ τρόπος

Η F είναι κυρτή στο $(0\ ,\ +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της $M\ (2\theta\ ,\ f\ (2\theta))$, με $\theta > 0$.

$(\varepsilon) : y - F\ (2\theta) = F'(2\theta)\cdot(x - 2\theta) \quad \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y = F\ (2\theta) + F'(2\theta)\cdot(x - 2\theta)$

- $\theta \neq 2\theta$, άρα $F\ (\theta) > F\ (2\theta) + F'(2\theta)\cdot(\theta - 2\theta) \quad \Leftrightarrow$

  $F\ (\theta) > F\ (2\theta) - \theta\cdot F'(2\theta)$ **(1)**
- $3\theta \neq 2\theta$, άρα $F\ (3\theta) > F\ (2\theta) + F'(2\theta)\cdot(3\theta - 2\theta) \quad \Leftrightarrow$

  $F\ (3\theta) > F\ (2\theta) + \theta\cdot F'(2\theta)$ **(2)**

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$F\ (\theta) + F\ (3\theta) > 2F(2\theta)$, για τυχαίο $\theta > 0$.

Επομένως $F\ (x) + F\ (3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x > 0$.

Δ4. $F'(x) = f\ (x) < 0$, άρα F γνησίως φθίνουσα στο $(0\ ,\ +\infty)$

Θεωρούμε συνάρτηση Q, με $Q\ (x) = 2F\ (x) - F\ (\beta) - F\ (3\beta)$

$Q'(x) = 2F'(x) = 2f\ (x) < 0$, άρα Q γνησίως φθίνουσα στο $(0\ ,\ +\infty)$

- Η Q είναι συνεχής στο $[\beta\ ,\ 2\beta]$ ως πράξεις συνεχών
- $Q\ (\beta) = 2F\ (\beta) - F\ (\beta) - F\ (3\beta) = F\ (\beta) - F\ (3\beta) > 0$,

  διότι $\beta < 3\beta \overset{F\downarrow}{\Rightarrow} F\ (\beta) > F\ (3\beta)$
- $Q\ (2\beta) = 2F\ (2\beta) - F\ (\beta) - F\ (3\beta) < 0$, από Δ3 για $x = \beta$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $Q\ (x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\beta\ ,\ 2\beta)$, η οποία είναι μοναδική αφού η Q είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\ ,\ +\infty)$.

Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta\ ,\ 2\beta)$, τέτοιο ώστε

$Q\ (\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2F\ (\xi) - F\ (\beta) - F\ (3\beta) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$F\ (\beta) + F\ (3\beta) = 2F\ (\xi)$