ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x),\ x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 7

Α2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α

Μονάδες 4

Α3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x}>0$ και πώς, αν $\bar{x}<0$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

β) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x, όταν $x=x_0$ (μονάδες 2).

γ) Αν A,B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε ισχύει ότι $P(A)>P(B)$ (μονάδες 2).

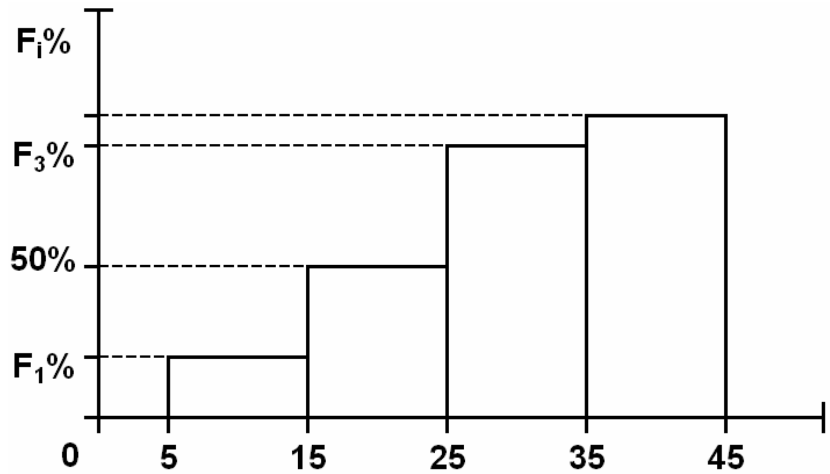
δ) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).

ε) $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5,45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



Β1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

Β2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι α=8 (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5, ·)		α+4			
[· , ·)		3α-6			
[· , ·)		2α+8			
[· , 45)		α-2			
Σύνολο					

Μονάδες 8

Β3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \simeq 9,17$)

Μονάδες 8

Β4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$

- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\nu=3$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $M(x,f(x))$, $x>0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x,0)$ και η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0,f(x))$. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

Δ3. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i), i=1,2,...,10 της ευθείας ε, τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \varnothing$ και $A \cap B \neq \varnothing$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f\big(P(A)\big) + f\big(P(A \cap B)\big) \geq 2f\big(P(A \cup B)\big)$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (*για τους εξεταζομένους*)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

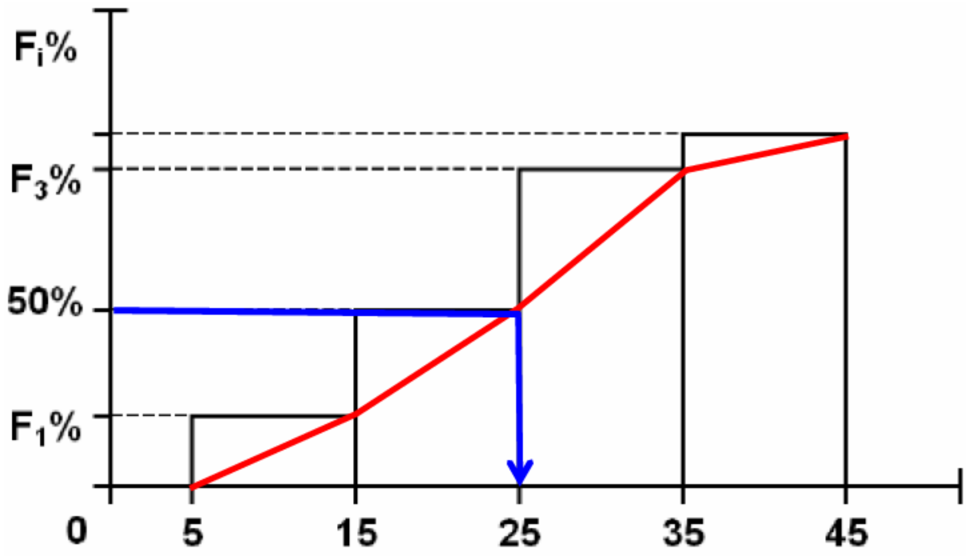
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 148

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 96

Α4. α. ΛΑΘΟΣ, β. ΣΩΣΤΟ, γ. ΛΑΘΟΣ, δ. ΣΩΣΤΟ, ε. ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.



Άρα **δ = 25**

Β2. $v = \sum v_i = 7\alpha + 4$

$$F_2 = 0{,}50 \Leftrightarrow \frac{v_1 + v_2}{v} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{4\alpha - 2}{7\alpha + 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 8$$

Κλάσεις	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i v_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 v_i$
[5 , 15)	10	12	20	12	20	120	-14	196	2352
[15 , 25)	20	18	30	30	50	360	-4	16	288
[25 , 35)	30	24	40	54	90	720	6	36	864
[35 , 45)	40	6	10	60	100	240	16	256	1536
ΣΥΝΟΛΑ	-	60	100	-	-	1440	-	-	5040

Β3. $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{1440}{60} = 24$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{5040}{60} = 84$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \cong 9{,}17$$

Β4. Στην κλάση [35 , 45) έχουμε :

Σε πλάτος 10 (45 – 35) αντιστοιχεί το 10% των μαθητών

<u>Σε πλάτος 8 (45 – 37) αντιστοιχεί το x% των μαθητών</u>

$10x = 8 \cdot 10 \Leftrightarrow$ **x = 8% των μαθητών**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα

Α : «Ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά»

Β: «Ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά»

$$P(A) = \frac{3v}{v^2 + 1},\quad P(B) = \frac{v + 2}{v^2 + 1},\quad P(A \cap B) = \frac{v + 1}{v^2 + 1}$$

Γ1. $P(A \cup B) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2\left(\sqrt{x^2 + 3} - 2\right)}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2\left(\sqrt{x^2 + 3} - 2\right)\left(\sqrt{x^2 + 3} + 2\right)}{x(x + 1)\left(\sqrt{x^2 + 3} + 2\right)}$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2(x - 1)\cancel{(x + 1)}}{x\cancel{(x + 1)}\left(\sqrt{x^2 + 3} + 2\right)} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x - 1)}{x\left(\sqrt{x^2 + 3} + 2\right)} = 1$$

άρα **το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μια τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες είναι βέβαιο.**

Γ2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$1 = \frac{3v}{v^2 + 1} + \frac{v + 2}{v^2 + 1} - \frac{v + 1}{v^2 + 1} \Leftrightarrow v^2 + 1 = 3v + v + 2 - v - 1 \Leftrightarrow$$

$$v^2 - 3v = 0 \Leftrightarrow v(v - 3) = 0 \Leftrightarrow v = 0 \text{ ή } v = 3$$

Είναι $v \geq 3$, άρα $\mathbf{v = 3}$.

Γ3. Για $v = 3$ είναι $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}5$ και $P(A \cap B) = 0{,}4$

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0{,}9 + 0{,}5 - 0{,}8 = \mathbf{0{,}6}$$

Γ4. $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = 0{,}4 \Rightarrow \dfrac{32}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{10} \Leftrightarrow \mathbf{N(\Omega) = 80}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(\dfrac{1 + \ell n^2 x}{x}\right)' = \dfrac{(1 + \ell n^2 x)' \cdot x - (1 + \ell n^2 x) \cdot (x)'}{x^2}$

$$= \frac{2\ell n x - 1 - \ell n^2 x}{x^2} = \frac{-(\ell n x - 1)^2}{x^2}$$

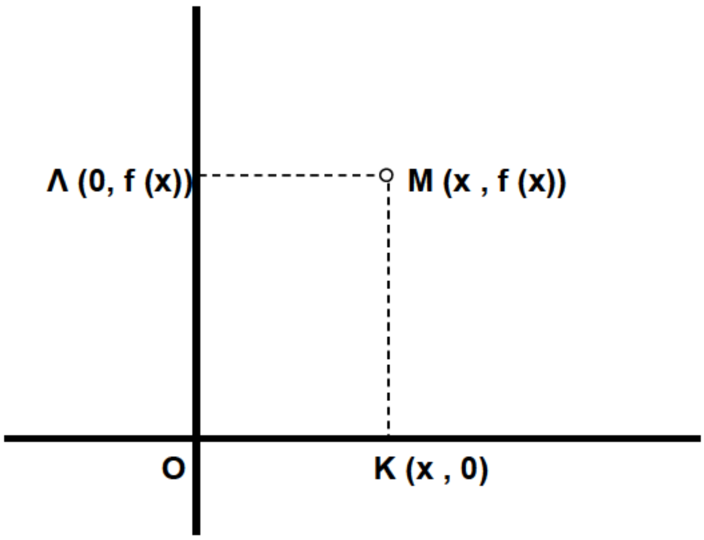
x	0	e	+∞
f ΄(x)	-	0	-
f (x)	↘		↘

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ2. $E(x) = (OK) \cdot (O\Lambda)$

$$= x \cdot \frac{1 + \ell n^2 x}{x}$$

$$= 1 + \ell n^2 x, \; x > 0$$



$$E'(x) = (1 + \ell n^2 x)'$$

$$= \frac{2\ell n x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο για $x = 1$ και
$(OK) = (OΛ) = 1$, άρα **όταν το ΟΚΜΛ γίνει τετράγωνο.**

Δ3. $\lambda = f'(1) = -1$, άρα $(\varepsilon) : y = -x + \beta$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου

- όταν όλες οι τιμές μιας μεταβλητής x_i πολλαπλασιάζονται επί μια σταθερά c, τότε οι νέες τιμές y_i που προκύπτουν έχουν $\bar{y} = \bar{x} \cdot c$ και $s_y = s_x \cdot |c|$.
- όταν σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής x_i προσθέσουμε μια σταθερά c, τότε οι νέες τιμές y_i που προκύπτουν έχουν $\bar{y} = \bar{x} + c$ και $s_y = s_x$.

x_i	$\rightarrow$	$z_i = (-1) \cdot x_i$	$\rightarrow$	$y_i = z_i + \beta$, $i = 1, \dots 10$
$\bar{x} = 10$	$\rightarrow$	$\bar{z} = (-1) \cdot 10 = -10$	$\rightarrow$	$\bar{y} = -10 + \beta$
$s_x = 2$	$\rightarrow$	$s_z = \lvert -1 \rvert \cdot 2 = 2$	$\rightarrow$	$s_y = 2$

Πρέπει $CV_y \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{s_y}{|\bar{y}|} \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{2}{|\beta - 10|} \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow$

$$|\beta - 10| \ge 20 \Leftrightarrow \beta - 10 \ge 20 \text{ ή } \beta - 10 \le -20 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\beta \ge 30 \text{ ή } \beta \le -10}$$

Δ4. • $A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \le P(A \cup B) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(P(A)) \ge f(P(A \cup B))$ (1)

• $A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \le P(A \cup B) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$
$f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B))$ (2)

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε :

$$\mathbf{f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))}$$