

ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ 2004

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ1ο

- A.** Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, $\theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι ισχύει:
 $\log_a \theta^k = k \log_a \theta$.

Μονάδες 9

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Για οποιουδήποτε θετικούς αριθμούς x_1, x_2 ισχύει

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \frac{\log x_1}{\log x_2}.$$

- β.** Το άθροισμα των πρώτων n όρων αριθμητικής προόδου (a_n) είναι

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

- γ.** Αν $u(x)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $\Delta(x)$ δια του $\delta(x)$, όπου $\delta(x)$ και $u(x)$ είναι μη μηδενικά πολυώνυμα, τότε ο βαθμός του $u(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του $\delta(x)$.

- δ.** Εάν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι οποιασδήποτε αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

Μονάδες 4

- Γ.** Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας στις παρακάτω ισότητες, τα κενά που σημειώνονται με ...

- α.** $\sqrt[n]{a^m} = a^{\dots}$ όπου $a > 0$, m ακέραιος και n θετικός ακέραιος

- β.** $a^{\log \theta} = \dots$ όπου $\theta > 0$ και $a > 0$ με $a \neq 1$

- γ.** $\log_a a^x = \dots$ όπου $a > 0$ με $a \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

- Δ.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε με το είδος της μονοτονίας των συναρτήσεων $\eta_{\mu x}$ και $\sigma_{\nu x}$.

| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
|------------------|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| $\eta_{\mu x}$ | | | | | |
| $\sigma_{\nu x}$ | | | | | |

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x - \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu x = 0$.

Μονάδες 13

β. Να αποδείξετε ότι $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$
για όλες τις τιμές του α που ορίζεται η ισότητα.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να κάνετε την διαίρεση του $P(x)$ δια του $x^2 - 1$ και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

Μονάδες 4

γ. Για $\alpha = 3$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4ο

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^x - 1}.$$

Μονάδες 13

B. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 5^x$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}.$$

Μονάδες 12

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω ότι είναι

$$\log_a \theta = x \quad (1)$$

Τότε σύμφωνα με τον ορισμό των λογαρίθμων θα έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\theta = a^x$$

οπότε $\theta^k = (a^x)^k \Leftrightarrow \theta^k = a^{xk} \Leftrightarrow$ (με $k \in \mathbb{R}$)

$$\log_a \theta^k = kx \quad (2) \quad (\text{ορισμός των λογαρίθμων})$$

Τέλος η (2) λόγω της (1) γράφεται

$$\log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta$$

B.

| | | | |
|----|----|----|----|
| α. | β. | γ. | δ. |
| Λ | Σ | Σ | Λ |

Γ.

α. $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$

β. $a^{\log_a \theta} = \theta$

γ. $\log_a a^x = x$

Δ.

| | | | | | |
|------|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| ημx | ↗ | ↘ | ↘ | ↘ | ↗ |
| συνx | ↘ | ↘ | ↗ | ↗ | ↗ |

ΘΕΜΑ 2ο

α. Έχουμε

$$\eta\mu 2x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow (2\eta\mu x - \sqrt{3}) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$$

οπότε

$$2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

ή

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε

$$2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{3}$$

οπότε

$$\left(x = 2κπ + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2κπ + \pi - \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \left(x = 2κπ + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2κπ + \frac{2\pi}{3} \right)$$

με $\kappa \in \mathbb{Z}$

Από την (2) έχουμε

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2}. \quad \text{Άρα } x = 2κπ \pm \frac{\pi}{2} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

β.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} &= \frac{1 - (1 - 2\eta\mu^2\alpha)}{2\eta\mu\alpha + 2\eta\mu\alpha \cdot \sin\alpha} = \frac{1 - 1 + 2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha(1 + \sin\alpha)} = \frac{2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha \cdot (1 + \sin\alpha)} = \\ &= \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

| | |
|--|-----------------|
| $x^4 - 8x^3 + (5a - 1)x^2 + 8x - 3a - 6$ | $x^2 - 1$ |
| $-x^4 \quad + \quad x^2$ | $x^2 - 8x + 5a$ |
| $-8x^3 + 5ax^2 + 8x - 3a - 6$ | |
| $8x^3 \quad - 8x$ | |
| $5ax^2 \quad - 3a - 6$ | |
| $-5ax^2 \quad + 5a$ | |
| $2a - 6$ | |

Από την παραπάνω διαίρεση προκύπτει η ταυτότητα:

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 8x + 5a) + 2a - 6$$

β. Η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια όταν
 $u = 0 \Leftrightarrow 2a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 3$.

γ. Για $a = 3$ η εξίσωση $P(x) = 0$
γράφεται:

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 &= 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 8x + 5 \cdot 3) = 0 \Leftrightarrow \\ (x - 1)(x + 1)(x^2 - 8x + 15) &= 0 \Leftrightarrow \\ (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x - 5) &= 0. \end{aligned}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $-1, 1, 3, 5$.

Η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι κάτω από τον x ' x όταν και μόνον όταν
 $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x - 5) < 0$,

που από τον πίνακα προσημών

| | | | | | | |
|--------|-----------|---------|-----|---------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 1 | 3 | 5 | $+\infty$ |
| $p(x)$ | $+$ | \circ | $-$ | \circ | $+$ | $-$ |

προκύπτει ότι $x \in (-1, 1) \cup (3, 5)$.

ΘΕΜΑ 4ο

A.

Το πεδίο ορισμού της f είναι οι τιμές του x για τις οποίες:

$$-2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 1 \geq 0$$

Θέτοντας $\left(\frac{1}{5}\right)^x = y > 0$ (1) έχουμε:

$$-2y^2 + 3y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2(y-1) \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \geq 5^x \geq 1 \Leftrightarrow \log 2 \geq \log 5^x \geq \log 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \cdot \log 5 \leq \log 2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x \leq \frac{\log 2}{\log 5}$$

Σημ. Εάν χρησιμοποιούσαμε το φυσικό λογάριθμο θα είχαμε $0 \leq x \leq \frac{\ln 2}{\ln 5}$

B.

Το πρώτο μέλος της δοσμένης εξίσωσης γράφεται:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} + \dots + 5^{x+49} =$$

$$= 5^x + 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^2 + \dots + 5^x \cdot 5^{49} = 5^x \cdot (1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49}) \quad (1)$$

όμως το άθροισμα $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49}$ είναι άθροισμα των 50 πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 5$.

Οπότε:

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49} = \frac{1 \cdot (5^{50} - 1)}{5 - 1} = \frac{5^{50} - 1}{4} \quad (2)$$

Έτσι η (1) λόγω της (2) γράφεται:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = 5^x \cdot \frac{5^{50} - 1}{4}$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$5^x \cdot \frac{5^{50} - 1}{4} = \frac{125 \cdot (5^{50} - 1)}{4} \Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3$$

Άρα $x = 3$ (αφού η συνάρτηση 5^x είναι 1-1).